Fujita 自由性猜想的证明思路

怎样用 mL 的截面证明 $K_X + 3L$ 在给定点生成?

个人研读笔记 · Minzhe Zhu 编订 · 2026 年 11 月

为便于理解证明，我们先从光滑射影曲面入手。此时格点计数只涉及两个变量，排除正维极小中心也只需考虑曲线，因而可以用较简单的计算看清证明的主线。我们会特别指出哪些步骤依赖于维数，并在文末说明这些步骤在一般维数下如何处理。

主定理（原稿定理 1.1）

设 X 是复数域上维数 $n \geq 1$ 的光滑连通射影簇，L 是 X 上的一个 ample line bundle。则

$$K_X + (n+1)L$$

由整体截面生成。

推论 6.3 对每个整数 $k \geq n+1$，$K_X + kL$ 都由整体截面生成。

本文解读 OpenAI 的《*Fujita's freeness conjecture*》（2026 年 9 月 23 日稿），沿用原稿的定理编号。以下采用线丛的加法记号。写 $P = K_X + (n+1)L$，$P_x = P \otimes \mathbb{C}(x)$ 为点 x 处的一维纤维。整体生成等价于对每个闭点 x 都能找到一个 $s \in H^0(X, P)$ 满足 $s(x) \neq 0$。常数 $n+1$ 在所有 (X, L) 中是最佳的。取 $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$，记超平面类为 H，则 $K_{\mathbb{P}^n} + (n+1)H = 0$，而 $K_{\mathbb{P}^n} + nH = -H$ 没有非零截面。

假设 x 是 $|K_X + 3L|$ 的一个 base point

这意味着 $P = K_X + 3L$ 的每个整体截面都在 x 消失。证明先研究非零截面 $s \in H^0(X, mL)$ 在 x 处的消失阶 $\mathrm{ord}_x(s)$。在 x 附近平凡化 mL 后，这就是 s 的 Taylor 展开中非零项的最低总次数。第三节考察一组适配基中这些消失阶的平均值。

第六节在光滑双有理模型 $\pi : Y \to X$ 上构造有效有理除子 B 和映到 x 的非空约化除子 S。B 在每个分量 $F \subset S$ 上的系数等于其 log discrepancy $A_X(F)$。其余与 S 相交的分量满足 $\mathrm{coeff}_F(B) < A_X(F)$。由此在 S 上构造 section，用 vanishing 提升到 Y，再 descend 到 X，得到 P 在 x 非零的 section。

阅读路线

第二节	工具箱	第 2 页
第三节	在 base point 处，归一化平均消失阶的下极限大于 $2/3$	3–5 页
第四节	指数平均在有限次数取到极小值，且尺度有统一界	6–8 页
第五节	比较同一个切向矩的上下界，排除曲线中心	9–12 页
第六节	由极小点的梯度构造边界，再从 S 上提升 section	13–16 页
任意维数	高维计算的对应关系，以及所有 $k \geq n+1$ 的推广	17–19 页

第二节

工具箱

以下记 $R_j = H^0(X, jL)$，$N_j = \dim R_j$。因为 L 是 ample line bundle，Hilbert 多项式给出

$$N_j = \frac{L^n}{n!} j^n + O(j^{n-1}), \qquad L^n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

对光滑双有理模型 $\pi : Y \to X$ 上的素除子 F，记 $A(F) = 1 + \mathrm{ord}_F(K_{Y/X})$，其中 $K_{Y/X} = K_Y - \pi^* K_X$。$c_X(v)$ 表示赋值的闭中心。条件 $x \in c_X(v)$ 允许中心是一条经过 x 的曲线。

2.2 SNC retraction

在一组有效除子 D_i 的共同 log resolution 上，取全部例外分量和严格变换组成简单正规交叉（SNC）边界 $\sum_j E_j$。给定除子赋值的正倍数 w，置 $u_j = w(E_j)$。若某个 $u_j > 0$，以这些权重定义单项式赋值 r，其 log discrepancy 为 $A(r) = \sum_j u_j A(E_j)$。引理 2.2 给出

$$r(D_i) = w(D_i), \qquad A(r) \leq A(w), \qquad c_X(r) \supseteq c_X(w).$$

前一等式来自单项式分解。后一不等式来自约化 SNC 对 $(Y, \sum E_j)$ 是 lc。对光滑簇上的边界 B，lc 表示每个素除子赋值都满足 $\mathrm{ord}_F(B) \leq A(F)$，klt 表示严格小于。

2.3 log canonical threshold 的下半连续性

记 $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a})$ 为理想 $\mathfrak{a}$ 在 x 处的 log canonical threshold。它等于 $\min_{x \in c_X(F)} A(F)/\mathrm{ord}_F(\mathfrak{a})$，只考虑分母为正的项。有限时，最小值在一个 log resolution 上即可取到。若 $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_X$，则 $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}) = +\infty$。代数族 $\mathfrak{a}_s$ 满足 $\{(x, s) : \mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}_s) \leq c\}$ 为 Zariski 闭集。第四节用它把“存在一个赋值”的条件变成旗簇（flag variety）上的闭条件。

2.4 Kawamata–Viehweg vanishing

设 Y 光滑射影，D 是整除子，Θ 是系数在 $[0, 1)$ 内的有效有理 SNC 边界。若 $D - (K_Y + \Theta)$ 是 nef and big（与每条曲线交数非负，且体积为正），则 $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = 0$ 对所有 $i > 0$ 成立。第三、六节取 Θ 为一个有理除子的小数部分，利用 $H^1 = 0$ 提升截面。

2.5 将 Y 上的截面 descend 到原来的代数簇 X

设 C 是 Y 上的整除子，其正部由 π 的例外除子组成。则 $\pi^* P + C$ 的任一截面都能 descend 到 X，得到 P 的一个正则截面 s。若 F 映到 x，且 C 沿 F 的系数为零，提升截面在 F 的一般点非零便推出 $s(x) \neq 0$。这里用到 X 正规，而在 x 消失的局部函数沿 F 有正阶。

第三节　假设 x 是 $|K_X+3L|$ 的一个 base point

jL 的截面在 x 处平均消失到几阶?

从这里起，除特别说明外，X 是任意光滑复射影曲面，L 是 X 上的 ample line bundle，$x\in X$ 是固定的闭点。置 $P=K_X+3L$。取 $H^0(X,jL)$ 的一组适配于 ord_x 的基，将基中各截面在 x 处的消失阶取平均，再除以 j。命题 3.2 断言，若 x 是 $|P|$ 的一个 base point，则当 $j\to\infty$ 时，所得数列的下极限严格大于 $2/3$。

Step 1. 为计算这个平均值，在 x 取正则参数 u,w，选定 L 的局部标架，并用其各次幂平凡化 jL。给截面的 Taylor 单项式排序，先比总次数，同次时再比 u 的次数，均取最小者。若首项是 $cu^{\alpha}w^{\beta}$，就记 $\mathrm{in}(s)=(\alpha,\beta)$。于是 $\mathrm{ord}_x(s)=\mathrm{mult}_x(s)=\alpha+\beta$。写

$$H_j=\{\mathrm{in}(s):0\neq s\in R_j\}\subset\mathbb{Z}^2_{\geq 0}.$$

逐个消去相同首项的系数，就能选出首指数互异的一组基。因为任意非零线性组合的首项来自其中最小的首项，$\#H_j=N_j$。相乘时首指数相加，故 $H_j+H_h\subseteq H_{j+h}$。这样的基适配于 ord_x 给出的过滤，每个消失阶的重数由各级过滤空间的维数确定。其归一化均值为

$$\mu_j=\frac{1}{jN_j}\sum_{(\alpha,\beta)\in H_j}(\alpha+\beta).$$

取 $k>0$ 使 kL very ample。取 $|kL|$ 中一条经过 x 的一般曲线 C，它在 x 处光滑，与 $\mathrm{div}(s)$ 无公共分量。因此

$$\mathrm{mult}_x(s)\leq C\cdot\mathrm{div}(s)=(kL)\cdot(jL)=kjL^2.$$

第四节会用到这个对所有非零截面统一的线性界。

先由格点计数给出 μ_j 的下界。在第一象限放入 N_j 个不同整点，依总次数从小到大填入，各点的总次数之和就最小。第 d 层有 $d+1$ 个点，填至第 r 层的平均总次数恰为

$$\frac{\sum_{d=0}^{r}d(d+1)}{\sum_{d=0}^{r}(d+1)}=\frac{2r}{3}.$$

因为 $N_j=L^2j^2/2+O(j)$，所需层数为 $r=\sqrt{L^2}j+O(1)$。最后一层只填一部分，对平均次数的影响为 $O(1)$。所以 $\liminf_j\mu_j\geq 2\sqrt{L^2}/3$。

命题 3.2 的曲面形式　若 $x\in\mathrm{Bs}\,|K_X+3L|$，则 $\liminf_{j\to\infty}\mu_j>2/3$。

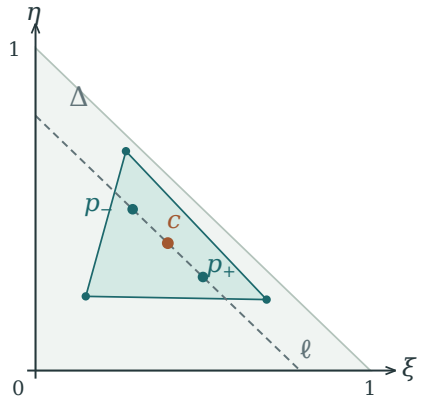
当 $L^2>1$，格点计数已经给出严格号。唯一需要处理的是 $L^2=1$ 且某个子列上 $\mu_j\to 2/3$。证明将从这次等号直接构造一个在 x 非零的 P 的截面。

Step 2. 等号情形下，我们从缩放后的格点 $j^{-1}H_j$ 构造两个截面。在单位三角形

$$\Delta = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : \xi + \eta \leq 1\}$$

的内部，取一个闭包仍在内部的小圆盘。若整个圆盘漏掉，最小填法中就有至少 $c_0 j^2$ 个总次数 $\leq (1-\delta)j$ 的点需要替换。每个补进的点总次数至少是 $j - O(1)$，其余替换也不会降低最小和。总次数至少多出常数倍的 j^3，除以 jN_j 后仍有固定正差。这与 $\mu_j \to 2/3$ 矛盾。于是任意这样的固定圆盘，对子列中所有充分大的 j 都能命中。

取有理数 $2 < t' < 3$。我们希望对某个正整数 h，用 $ht'L$ 的截面在 x 处达到重数 $2h$。因此归一化首指数应落在直线 $\ell = \{\xi + \eta = 2/t'\}$ 上。这条线经过 Δ 的内点 $c = (1/t', 1/t')$，而 $t' < 3$ 为下一步应用 Kawamata–Viehweg vanishing 留出了正性。



在 c 周围选三个小圆盘，使每盘任取一点所成的三角形都把 c 包在内部。在**同一个次数** j，从三盘中各取一个 $q_i = \gamma_i/j$，$\gamma_i \in H_j$。在它们的凸包与 ℓ 的交段上，选取分居 c 两侧的有理点 p_-, p_+，按第一坐标递增排列。

为了把这两个有理点实现为截面的归一化首指数，写 $p_\pm = \sum_i b_{\pm i} q_i$，其中 $b_{\pm i} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ 且 $\sum_i b_{\pm i} = 1$。取公共倍数 M 使 $Mb_{\pm i}$ 和 $h = jM/t'$ 都是整数。选 $\mathrm{in}(s_i) = \gamma_i$，则 $r_\pm = \prod_i s_i^{Mb_{\pm i}}$ 属于 $R_{ht'}$，首指数是 $jMp_\pm$。这给出

$$\mathrm{in}(r_\pm) = (a_\pm, 2h - a_\pm), \qquad a_- < h < a_+.$$

两个截面在 x 处的重数都恰为 $2h$。在 x 处作 blow up 后，条件 $a_- < h < a_+$ 将给出它们在例外曲线上每一点的共同消失阶的上界。

Step 3. 在 x 处作 blow up，记为 $\pi : Y = \mathrm{Bl}_x X \to X$，例外曲线为 $E \simeq \mathbb{P}^1$。拉回 $r_\pm$，扣去共同的 $2hE$，再限制到 E 上，得到次数 $2h$ 的最低次齐次式 $g_\pm$。例如在 $u = zw$ 的图上，先除以 w^{2h}，再令 $w = 0$，恰好留下 $g_\pm(z, 1)$。

E 上的每个点对应 x 处的一个切方向。先看 $z_0 = [0 : 1]$，此处 $\mathrm{ord}_{z_0}(g_\pm) = a_\pm$，所以 g_- 的消失阶小于 h。在 E 的其余点，g_+ 总共只剩 $2h - a_+ < h$ 个零点（按重数计）。因此限制理想 $\mathfrak{b}_E = (g_-, g_+)$ 满足

$$\mathrm{ord}_z(\mathfrak{b}_E) < h \quad (z \in E), \qquad \mathrm{lct}_z(E, \mathfrak{b}_E) > 1/h.$$

这仍允许有限个共同零点，但以 $1/h$ 为系数时，它们的重数向下取整全为零。

为了提升例外曲线上的截面，先计算可用于 vanishing 的正性。记 $H = \pi^*(ht'L) - 2hE$，$\mathfrak{b}$ 为两个截面扣去 $2hE$ 后的基理想。由 $K_Y = \pi^* K_X + E$，

$$\pi^* P - (K_Y + E) = H/h + (3 - t')\pi^* L.$$

取 $(Y, E, \mathfrak{b})$ 的射影 log resolution $\sigma : T \to Y$，写 E' 为 E 的严格变换，$\mathfrak{b}\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_T(-G)$。令 $D_T = K_T + \sigma^*(\pi^* P - K_Y - E) - \lfloor G/h \rfloor$。于是

$$D_T - K_T - \{G/h\} = (3 - t')(\pi\sigma)^* L + (\sigma^* H - G)/h.$$

第一项 nef and big，第二项因 $\sigma^* H - G$ 由整体截面生成而 nef，故 $H^1(T, \mathcal{O}_T(D_T)) = 0$。对 E' 的限制给出满射

$$H^0(T, D_T + E') \longrightarrow H^0(E', (D_T + E')|_{E'}).$$

现在计算限制满射右端的线丛。$E' \to E$ 是光滑曲线间的双有理态射，因而是同构。G 不含 E'，其限制给出 $\mathfrak{b}_E$ 的零因子。由 SNC 性，取整与限制交换。由伴随公式，这个线丛同构于 $P_x \otimes \mathcal{O}_{E'}(-\lfloor G|_{E'}/h \rfloor) = P_x \otimes \mathcal{O}_{E'}$。任取 $0 \neq e \in P_x$，将它在 E' 上给出的常值 section 提升到 T。相对于 $(\pi\sigma)^* P$ 的修正为

$$K_{T/Y} - \sigma^* E + E' - \lfloor G/h \rfloor.$$

它在 E' 上系数为零，正部是例外的。引理 2.5 遂给出 $s(x) \neq 0$。这就排除了 x 是 base point 时的等号情形，证明了命题 3.2。

第四节　有限次数的极小化

指数平均的下确界怎样取到?

仍假设 x 是 $|P|$ 的一个 base point。固定 m 和 $t>0$，令 $N=N_m>0$。让 R_m 的有序基 $\mathbf{s}=(s_1,\dots,s_N)$ 和非零单项式赋值 v 同时变化，考虑指数平均及其下确界

$$F_{m,t}(v,\mathbf{s})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp\Big(\frac{A(v)}{t}-\frac{v(s_i)}{m}\Big),\qquad f_{m,t}(x)=\inf_{\substack{\mathbf{s},v\neq 0\\ x\in c_X(v)}}F_{m,t}(v,\mathbf{s}).$$

第四节要证明这个下确界能取到。具体地，存在 m_0 和 $t_0\in(0,3)$，使得对所有 $m\geq m_0$、$t\in[t_0,3]$，都有一对 $(v,\mathbf{s})$ 满足 $F_{m,t}(v,\mathbf{s})=f_{m,t}(x)$。命题 4.4 还给出与 m,t 无关的界 $0<a_*\leq A(v)\leq a^*<\infty$，对所有极小对都成立。这里仅要求 $x\in c_X(v)$，所以中心也可能是经过 x 的一条曲线。

极小性随后要用来构造一个有效除子。记 $D_i=\operatorname{div}(s_i)$，因而 $v(s_i)=v(D_i)$。固定基 $\mathbf{s}$，沿射线 λv 对 $\log F_{m,t}$ 求导。将各项的指数因子除以它们的总和，便得到导数公式中的权重 $p_i(\lambda)$。

$$\frac{d}{d\lambda}\log F_{m,t}(\lambda v,\mathbf{s})=\frac{A(v)}{t}-\sum_i p_i(\lambda)\frac{v(D_i)}{m},\qquad p_i(\lambda)=\frac{e^{-\lambda v(D_i)/m}}{\sum_h e^{-\lambda v(D_h)/m}}.$$

这些权重都为正且和为 1。若 $(v,\mathbf{s})$ 取到极小值，$\lambda=1$ 处的导数为零，故归一化消失阶 $v(D_i)/m$ 的加权平均恰为 $A(v)/t$。用此时的权重 $p_i=p_i(1)$ 组合零除子 $D_i\sim mL$，就得到有效 $\mathbb{R}$-除子

$$\Delta=\frac{t}{m}\sum_i p_iD_i\sim_{\mathbb{R}}tL,\qquad v(\Delta)=\frac{t}{m}\sum_i p_iv(D_i)=A(v).$$

第五节将选取一个 $t\in(0,3)$ 和一列次数 $m_\nu\to\infty$，证明每当 $(v,\mathbf{s})$ 取到 $f_{m_\nu,t}(x)$ 时，必有 $c_X(v)=\{x\}$。第六节再对相应的 Δ 作有理化和扰动，在模型 $Y\to X$ 上构造一个 boundary 和一个映到 x 的约化除子 S。这个 boundary 沿 S 的各分量系数为 1，沿与 S 相交的其余分量系数小于 1。截面就从 S 上提升。

为证明本节的存在性结论，我们从一列使 $F_{m,t}$ 趋于下确界的 $(v_j,\mathbf{s}_j)$ 出发。先控制 $A(v_j)$ 的大小，再用完全旗标固定一组基。最后，对这组基的零除子取共同的 log resolution，在同一个模型上对赋值的权重取极限。

Step 1. 先构造一个使 $F_{m,t}<1$ 的测试对。取适配于 ord_x 的基 $\mathbf{s}$。在 x 处作 blow up，例外曲线给出 ord_x，故 $A(\operatorname{ord}_x)=2$。在 $\lambda=0$ 处，$F_{m,t}(\lambda\operatorname{ord}_x,\mathbf{s})$ 连续延拓为 1，各项权重都是 $1/N$，故右导数为

$$\frac{d}{d\lambda}F_{m,t}(\lambda\operatorname{ord}_x,\mathbf{s})\Big|_{0+}=\frac{2}{t}-\mu_m.$$

由命题 3.2，可取 $t_0<3$ 充分接近 3，使上述导数在 $m\geq m_0$、$t\in[t_0,3]$ 时有统一的负上界。由 $\operatorname{mult}_x(s)\leq Cm$，二阶余项一致为 $O(\lambda^2)$。故同一个小 $\lambda>0$ 就给出 $f_{m,t}(x)\leq 1-\delta$，其中 $\delta>0$。

再考察满足 $F_{m,t}\leq 1-\delta/2$ 的测试对，记 $a=A(v)$。引理 4.1 由 $\operatorname{lct}_x(\operatorname{div}(s))\geq 1/\operatorname{mult}_x(s)$ 得到 $v(s)\leq a\operatorname{mult}_x(s)$。从而 $F_{m,t}\geq e^{-Ca}$，所以在 $F_{m,t}\leq 1-\delta/2$ 上，a 有正下界。

为给 $a=A(v)$ 找上界，取整数 $k\ge 6$ 使 kL very ample。选取 $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\in R_k$，使 $\sigma_0(x)\neq 0$，且 $z_1=\sigma_1/\sigma_0$ 与 $z_2=\sigma_2/\sigma_0$ 是 x 处的局部参数。对每个模 k 的剩余类 r，固定一个正整数 $b_r\equiv r \pmod k$ 和一个在 x 不消失的截面 $\tau_r\in R_{b_r}$。写 $m=qk+b_r$。当 $i+j\le q$ 时，局部单项式 $z_1^i z_2^j$ 乘以 $\tau_r\sigma_0^q$ 就给出整体截面。因此 R_m 满射到 x 处的 q 阶 jet 空间。由于 $q\sim m/k$，其维数 $\binom{q+2}{2}$ 与 N_m 的比值有正下界 κ。

任意一组基中至少有 κN_m 个截面的 q 阶 jet 非零。这些截面满足 $\mathrm{mult}_x(s_i)\le q$。取 $k\ge 6$ 的好处是，对所有 $t\in[t_0,3]$ 都有

$$q=\frac{m-b_r}{k}\le\frac{m}{6}\le\frac{m}{2t}.$$

由引理 4.1，这些截面满足 $v(s_i)\le aq\le ma/(2t)$，故 $F_{m,t}\ge \kappa e^{a/(2t)}$。合并得

$$\kappa\le f_{m,t}(x)\le 1-\delta,\qquad 0<a_*\le A(v)\le a^*<\infty\quad (F_{m,t}\le 1-\delta/2).$$

这些常数对所有大 m 和整个 t 区间统一。第五节将在选定 t 之前用到 a_*。

Step 2. 取 Step 1 所得范围内的 m,t。现在要为极小化序列固定一组基。有理权重可逼近实权重，故能取一列由除子赋值的正倍数给出的测试对，使其目标值趋向 $f_{m,t}(x)$。把每组基按归一化取值递减排序。由尺度界和 $v(s_i)/A(v)\le Cm$，取子列后有

$$A(v_\nu)\to a>0,\qquad \frac{v_\nu(s_{\nu,i})}{A(v_\nu)}\to q_i,\qquad q_1\ge\cdots\ge q_N\ge 0.$$

因此 $f_{m,t}(x)=N^{-1}\sum_i \exp(a/t-aq_i/m)$。至少一个 $q_i>0$，否则右端大于 1。若能在一组固定的基上同时实现下界 q_i，指数对取值的单调性就足以得到极小值。

给定有理数 $\alpha_1\ge\cdots\ge\alpha_N\ge 0$。一组基确定完全旗标 $U_i=\langle s_1,\dots,s_i\rangle$，$\dim U_i=i$。这些旗标的参数空间就是旗簇（flag variety）$\mathrm{Flag}(R_m)$。记 $\mathfrak{b}_i$ 为 U_i 的基理想，局部由 $s_1,\dots,s_i$ 生成。对任意赋值 w，都有 $w(\mathfrak{b}_i)=\min_{h\le i} w(s_h)$。由 α_i 的排列次序可得

$$w(s_i)\ge\alpha_i A(w)\ \text{对每个 } i\quad\Longleftrightarrow\quad w(\mathfrak{b}_i)\ge\alpha_i A(w)\ \text{对每个 } i.$$

右边只依赖旗标。若所有 α_i 都为零，在任意闭点 z 取 $w=\mathrm{ord}_z$ 就满足这些下界。若有 $\alpha_i>0$，取正整数 M 使每个正项的 M/α_i 都是整数，并令

$$\mathfrak{a}_{\alpha,U_\bullet}=\sum_{\alpha_i>0}\mathfrak{b}_i^{M/\alpha_i}.$$

对理想之和取赋值就是取最小值，所以上述下界等价于 $w(\mathfrak{a}_{\alpha,U_\bullet})\ge MA(w)$。因此，存在中心包含 z 的除子赋值 w 满足这些下界，当且仅当

$$\mathrm{lct}_z(\mathfrak{a}_{\alpha,U_\bullet})\le 1/M.$$

由引理 2.3，这些 $(z,U_\bullet)$ 在 $X\times\mathrm{Flag}(R_m)$ 中构成闭集。固定 $z=x$ 得到旗簇中的闭集。向 X 投影所得的点集记为 Z_α。旗簇是射影的，故 Z_α 也是闭集。

取满足上述次序的有理向量 $\alpha^{(k)}$ 逐项递增到 (q_i)，在 $q_i>0$ 时取 $\alpha_i^{(k)}<q_i$。固定 k 后，极小化序列中足够靠后的各项都满足这些下界，故相应的旗标闭集非空。这些闭集递减，由旗簇的射影性可取一个公共旗标。固定适配它的一组基 $\mathbf{s}$。对每个 k，都可选一个中心包含 x 的除子赋值 w_k，使 $w_k(s_i)/A(w_k)\ge\alpha_i^{(k)}$ 对所有 i 成立。w_k 可以随 k 变化，所用的始终是**同一组截面**。

Step 3. 令 $D_i = \mathrm{div}(s_i)$，取这些除子的共同射影 log resolution $\pi : Y \to X$，把例外曲线也计入 SNC 除子。记其分量为 E_j，置 $a_j = A(E_j) > 0$、$d_{ji} = \mathrm{ord}_{E_j}(D_i)$。令 $r_k = r_Y(w_k)$ 为 w_k 在 Y 上的 SNC retraction。引理 2.2 给出 $r_k(s_i) = w_k(s_i)$、$A(r_k) \le A(w_k)$，且中心仍包含 x。对充分大的 k，某个 $\alpha_i^{(k)} > 0$，故 $r_k(s_i) > 0$，从而 $r_k \neq 0$。固定基 $\mathbf{s}$ 时，

$$F_{m,t}(r_k, \mathbf{s}) = \exp\left(\frac{A(r_k) - A(w_k)}{t}\right) F_{m,t}(w_k, \mathbf{s}) \le F_{m,t}(w_k, \mathbf{s}).$$

因此可用 r_k 替换 w_k。再把 r_k 归一化为 $r_k/A(r_k)$，各截面的取值仍满足 $r_k(s_i)/A(r_k) \ge \alpha_i^{(k)}$。

SNC 除子只有有限多个交层（strata）。取子列后，各 r_k 对应于同一个交层的同一不可约分支。若只有一条分量，discrepancy 为 1 的权重唯一。若两条分量 E_1, E_2 相交，归一化权重满足 $u_1, u_2 \ge 0$ 且 $a_1u_1 + a_2u_2 = 1$。令 $\theta = a_1u_1$，则第 i 个截面的取值为

$$\theta\frac{d_{1i}}{a_1} + (1-\theta)\frac{d_{2i}}{a_2}, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

当 θ 到达端点时，中心在 Y 上从交点扩大为一条曲线，其像仍包含 x。取收敛子列得到 $A(\hat{v}) = 1$ 且 $\hat{v}(s_i) \ge q_i$。恢复原尺度 $v = a\hat{v}$，就有

$$f_{m,t}(x) \le F_{m,t}(v, \mathbf{s}) \le \frac{1}{N}\sum_i \exp\left(a/t - aq_i/m\right) = f_{m,t}(x).$$

这证明了命题 4.4。所得实权重单项式赋值和这组基确实取到下确界。

引理 4.5 比较 x 与一条过 x 的不可约曲线 W 上的非常一般点 y。固定 m。回忆 $z \in Z_\alpha$ 表示可以找到一组基和一个中心包含 z 的除子赋值，使归一化取值逐项至少为 α_i。若 $W \not\subseteq Z_\alpha$，则 $W \cap Z_\alpha$ 只是有限多个点。有理向量 α 只有可数多个，在复数域上可选光滑闭点 $y \in W$ 避开所有这些交集。因此一旦 $y \in Z_\alpha$，必有 $W \subseteq Z_\alpha$，特别地 $x \in Z_\alpha$。

现在从 y 处任意一个除子测试对 $(v, \mathbf{s})$ 出发。记 $a = A(v)$，把基按 $\beta_i = v(s_i)/a$ 递减排列。取有理数 $\alpha_i^{(\ell)} \uparrow \beta_i$，每组仍满足 $\alpha_1^{(\ell)} \ge \cdots \ge \alpha_N^{(\ell)} \ge 0$。$(v, \mathbf{s})$ 本身就满足第 ℓ 组下界，所以 $y \in Z_{\alpha^{(\ell)}}$，从而 $x \in Z_{\alpha^{(\ell)}}$。

于是对每个 ℓ，都能在 x 处选一组基 $\mathbf{s}^{(\ell)}$ 和一个除子赋值 w_ℓ，使 $w_\ell(s_i^{(\ell)})/A(w_\ell) \ge \alpha_i^{(\ell)}$。为了比较两处的 $F_{m,t}$，先令 $w'_\ell = aw_\ell/A(w_\ell)$。这样两个测试的 discrepancy 都是 a，指数的第一项同为 a/t。又因 $w'_\ell(s_i^{(\ell)}) \ge a\alpha_i^{(\ell)}$ 且截面的取值在指数中带负号，得到

$$f_{m,t}(x) \le F_{m,t}(w'_\ell, \mathbf{s}^{(\ell)}) \le \frac{1}{N}\sum_i \exp\left(\frac{a}{t} - \frac{a\alpha_i^{(\ell)}}{m}\right).$$

令 $\ell \to \infty$，右端的有限和趋于 $F_{m,t}(v, \mathbf{s})$。这对 y 处的每个除子测试对都成立。由 Step 2 的有理权重逼近，这些测试的下确界就是 $f_{m,t}(y)$。因此 $f_{m,t}(x) \le f_{m,t}(y)$。选取 y 时用到的闭集与 t 无关，故同一个 y 对所有 $t > 0$ 都适用。

最后，设 $(v_0, \mathbf{s}_0)$ 在 x 取到极小值，且 $c_X(v_0) = W$。由于 $y \in W$，它也是 y 处的测试对，而 $F_{m,t}(v_0, \mathbf{s}_0)$ 的值只由赋值和基决定。于是

$$f_{m,t}(y) \le F_{m,t}(v_0, \mathbf{s}_0) = f_{m,t}(x) \le f_{m,t}(y).$$

因此同一对在 y 仍取到极小值。第五节就可以在光滑点 y 处沿 W 的切方向扰动赋值，并用这个极小值比较扰动前后的函数值。

第五节　排除曲线中心

为什么极小赋值的中心只能是点?

命题 5.1　若 x 是 $|P|$ 的 base point，存在 $0<t<3$ 和趋于无穷的整数序列 m_ν，使每个 $f_{m_\nu,t}(x)$ 都取到，而且每一对极小数据中的赋值都以 $\{x\}$ 为中心。

Step 1. 先固定第四节范围内的 m,t。假设 $(v,\mathbf{s})$ 取到 $f_{m,t}(x)$，且 v 的中心是正维的。在曲面上，这个中心就是一条过 x 的不可约曲线 W。$\mathcal{O}_{X,\eta_W}$ 是离散赋值环，其单位在 v 下取零，故 $v=a\,\mathrm{ord}_W$ 且 $a=A(v)>0$。按引理 4.5 取 W 上的一个非常一般光滑点 y，即使 W 在 x 奇异，也可以在 y 取参数 (u,z)，使 $W=(u=0)$。

在 y 附近给 L 选一个局部标架 e。以后比较不同次数 j 的截面时，都在同一个 y 用参数 (u,z) 作 Taylor 展开，用 e^j 平凡化 jL。非零截面局部写作 $s=u^pg$，其中 $g|_W\neq 0$。令 $\beta=\mathrm{ord}_y(g|_W)$。按先比 u 指数、再比 z 指数的顺序，首指数恰为 (p,β)，而 $v(s)=ap$。令 Γ_j 为 R_j 中的所有首指数，则

$$\#\Gamma_j=N_j,\qquad \Gamma_j+\Gamma_h\subseteq\Gamma_{j+h}.$$

接下来要对 Γ_m 求和，所以想找一组基，让每个首指数恰好出现一次。直接对取到极小值的那组基做高斯消元即可。选一个首指数最小的基向量 s，记其首指数为 (p,β)。若另一个基向量 s' 也有这个首指数，就用 $s'-cs$ 替换 s'，其中常数 c 使 u^pz^β 的系数恰好抵消。两个截面都被 u^p 整除，所以 $v(s'-cs)\geq ap=v(s')$。这仍是一组基，而 $F_{m,t}$ 中截面的取值带负号，因此这次换基不会使函数值增大。原基已经取到最小值，换基后便仍取到同一个值。

消去其余基向量中的这个首项后，固定 s，只对余下的基向量继续消元。每轮固定一个基向量，最后便有 N_m 个互不相同的首指数。由于 $\#\Gamma_m=N_m$，每个 $(p,\beta)\in\Gamma_m$ 恰好出现一次。以下用 $\mathbf{s}$ 表示这组基。

现在沿切方向微扰 v，保持 $v_\varepsilon(u)=a$，令 $v_\varepsilon(z)=\varepsilon>0$。于是中心变为 y，$A(v_\varepsilon)=a+\varepsilon$。对固定的有限组基，$\varepsilon$ 充分小时 $v_\varepsilon(s)=ap+\varepsilon\beta$。因为横向指数每增一，旧权重至少增加 a，故先取 ε 小即可保住已有首项。

记 $F(\varepsilon)=F_{m,t}(v_\varepsilon,\mathbf{s})$。由 $F(\varepsilon)\geq f_{m,t}(y)=f_{m,t}(x)=F(0)$，求右导数得

$$0\leq(\log F)'(0+)=\frac{1}{t}-T_m,\qquad T_m=\frac{\sum_{(p,\beta)\in\Gamma_m}\beta e^{-ap/m}}{m\sum_{(p,\beta)\in\Gamma_m}e^{-ap/m}}.$$

改变一单位切向权重，discrepancy 的代价为 $1/t$，截面消失阶的加权收益为 T_m。下面用限制截面的增长给同一个 T_m 作下估计。

Step 2. 为了从下方估计 T_m，先固定横向阶 p，数一数能出现多少个切向首指数。记 $G_p(j)=\{\beta:(p,\beta)\in\Gamma_j\}$，$r_p(j)=\#G_p(j)$。第一组 $p=0$ 对应着限制空间。若截面在 W 上的限制非零，其在 y 处的消失阶便是 β。在限制映射的像上消元，得到

$$r_0(h)=I_W(h):=\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{im}\left(R_h\to H^0(W,hL|_W)\right).$$

引理 5.2 在这里断言，存在只依赖 (X,L) 的 H_0,K_0，使每条不可约约化曲线 $W\subset X$ 都满足 $I_W(h)\geq h-K_0$（$h\geq H_0$）。每个 m 的极小中心都可能是另一条曲线，所以误差必须对曲线的次数和奇点统一。

固定 $k>0$ 使 kL very ample，用 $|kL|$ 作射影嵌入。取两个一般线性形式 ℓ_0,ℓ_1，由它们给出的线性投影 $\pi=[\ell_0:\ell_1]:W\to\mathbb{P}^1$ 是次数 $D=k(L\cdot W)\geq k$ 的有限映射。记 $[T_0:T_1]$ 为底空间 $\mathbb{P}^1$ 的齐次坐标，$K_\eta=\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ 为其函数域。泛纤维（generic fiber）是 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}(W)$。把底域从 K_η 扩张到其代数闭包，就得到几何泛纤维（geometric generic fiber）。由于特征为零，$\mathbb{C}(W)/K_\eta$ 是 D 次可分扩张，所以几何泛纤维由 D 个不同的点组成。我们从中选 k 个点。

固定其中一点 P。对其余每个点，各选一个在该点为零、在 P 非零的线性形式。将这 $k-1$ 个形式相乘，再乘以在泛纤维上非零的 ℓ_0，便得到一个 k 次齐次式，在选出的点中只在 P 非零。因此，在这 k 个点上对 k 次齐次式求值，秩为 k。考虑把复系数的 k 次式 F 送到 $(F/\ell_0^k)|_W\in\mathbb{C}(W)$。由刚才的求值，其像在扩域后至少张成 k 维空间。扩域保持秩，故可选出 $F_1,\dots,F_k$，使 F_i/ℓ_0^k 在 K_η 上线性无关。

对 $q\geq k$，底空间上次数为 $q-k$ 的齐次单项式共有 $q-k+1$ 个，即

$$T_0^{q-k-r}T_1^r,\qquad r=0,1,\dots,q-k.$$

把它们沿 π 拉回，再分别乘以 F_i，就得到 $k(q-k+1)$ 个 q 次式 $F_i\ell_0^{q-k-r}\ell_1^r$，它们给出 R_{qk} 的截面。若这些截面在 W 上有复系数线性关系，除以 ℓ_0^q 后便得到 F_i/ℓ_0^k 在 K_η 上的线性关系。每个系数都是底空间坐标 T_1/T_0 的多项式。由线性无关性，这些多项式都为零，故原关系的复系数也全为零。因此

$$I_W(qk)\geq k(q-k+1).$$

每个模 k 的余数固定一个整体生成的 h_rL，用其中在 W 上不恒为零的截面相乘，就能覆盖所有大 h。这给出所需的 $h-K_0$，整个过程只估计限制像的维数。

要把 $p=0$ 的下界推广到每个非空组，只需利用截面乘法。乘积的首指数相加，所以 $G_p(j)+G_0(h)\subseteq G_p(j+h)$。对非空有限整数集 A,B 有 $\#(A+B)\geq\#A+\#B-1$。事实上，先固定 B 的最小元并走遍 A，再固定 A 的最大元并走遍 B 的其余元素，便得到这么多个严格递增的和。

因此若 $r_p(j)>0$，对所有充分大的 h 有

$$r_p(j+h)\geq r_p(j)+h-K,\qquad K=K_0+1.$$

同一个 K 适用于所有已出现的横向组。这是一维整数集的计算，在高维切向空间中由 Brunn–Minkowski 不等式替代。

Step 3. 每个含 r 个非负整数的集合，其元素和至少为 $r(r-1)/2$。因此知道切向指数的**数量**就能估计它们的**总和**。固定参考次数 m 和对应的 $a\,\mathrm{ord}_W$，设

$$w_p = e^{-ap/m}, \qquad Q_j = \sum_p w_p r_p(j), \qquad B_j = \sum_p w_p r_p(j)^2.$$

在每个辅助次数 j 都用同一个权重 $w_p = e^{-ap/m}$。在次数 m，对每组切向指数应用上面的整数求和估计，得到

$$mQ_m T_m = \sum_p w_p \sum_{\beta \in G_p(m)} \beta \geq \frac{1}{2}\sum_p w_p r_p(m)(r_p(m)-1) = \frac{B_m - Q_m}{2}.$$

于是 $T_m + 1/(2m) \geq B_m/(2mQ_m)$。为了给 B_m/Q_m 找下界，先估计次数由 j 增至 $j+h$ 时 B_j 至少增加多少。取 $h \geq \max\{H_0, K\}$，固定一个在次数 j 已经出现的横向阶 p，即 $r_p(j) > 0$。Step 2 给出 $r_p(j+h) \geq r_p(j) + (h-K)$。两边非负，平方得到

$$r_p(j+h)^2 \geq \big(r_p(j) + h - K\big)^2 = r_p(j)^2 + 2(h-K)r_p(j) + (h-K)^2.$$

把上式乘以 w_p，再舍去非负项 $w_p(h-K)^2$，可见这一组在次数 $j+h$ 的贡献比在次数 j 至少多 $2(h-K)w_p r_p(j)$。若 $r_p(j) = 0$，它在次数 j 的贡献为零，在次数 $j+h$ 的贡献为 $w_p r_p(j+h)^2 \geq 0$。因此把所有横向阶 p 的贡献相加，就得到

$$B_{j+h} \geq \sum_p w_p r_p(j)^2 + 2(h-K)\sum_p w_p r_p(j) = B_j + 2(h-K)Q_j.$$

为了把这个递推式累加到参考次数 m，固定整数 $\ell \geq 2$，取 $j_i = \lfloor im/\ell \rfloor$，$1 \leq i \leq \ell$，于是 $j_\ell = m$。在 ℓ 固定且 m 充分大时，每步 $h_i = j_{i+1} - j_i$ 都足够大。逐段累加并用 $B_{j_1} \geq 0$，得

$$T_m + \frac{1}{2m} \geq \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{j_{i+1} - j_i - K}{m} \frac{Q_{j_i}}{Q_m}.$$

为让右侧成为有用的 Riemann 和，还需要一个对 Q_j/Q_m 的下界。

为估计这个比值，固定 t 并记 $f_j = f_{j,t}(x)$。在次数 j 对首指数基用 $(j/m)v$ 作测试，其中心仍是 W，且截面阶除以 j 后恰为 ap/m。这样保持了同一个 w_p。discrepancy 则从 a 变成 ja/m。由极小值的定义、以及在次数 m 的取到性，

$$f_j \leq \frac{e^{ja/(mt)}}{N_j} Q_j, \qquad f_m = \frac{e^{a/t}}{N_m} Q_m.$$

相除给出

$$\frac{Q_j}{Q_m} \geq \frac{N_j}{N_m}\frac{f_j}{f_m} \exp\Big((1 - \frac{j}{m})\frac{a}{t}\Big).$$

维数、极小值和尺度变化各自贡献一个因子。最后的指数因子，是把临界下界 $1/3$ 变成严格下界的来源。

Step 4. 最后比较 T_m 的上下界。第四节的 $a_* > 0$ 对 $t \in [t_0, 3]$ 和所有大次数统一。于是可在选 t 之前定义

$$I_* = \int_0^1 s^2 \exp\Big(\frac{(1-s)a_*}{3}\Big)\, ds > \int_0^1 s^2\, ds = \frac{1}{3}.$$

现在固定 $t \in [t_0, 3)$ 足够靠近 3，使 $I_* > 1/t$。令 $c = \liminf_j f_{j,t}(x) \geq \kappa > 0$，选递增次数 m 使 $f_{m,t}(x) \to c$。若其中无穷多个 m 存在曲线中心的极小对，就在这些次数中各挑一对，应用前三步的估计。曲线与赋值可以随 m 变化。

对固定 $s = i/\ell \in (0,1)$，令 $j = \lfloor sm \rfloor$。由曲面 Hilbert 渐近和下极限的定义，

$$\frac{N_j}{N_m} \to s^2, \qquad \liminf_m \frac{f_j}{f_m} \geq 1.$$

第二式只用 $j \to \infty$ 和 $f_m \to c > 0$。系数 a/t 统一地至少为 $a_*/3$。代入 Step 3 的比值估计，得

$$\liminf_m \frac{Q_{\lfloor sm \rfloor}}{Q_m} \geq s^2 \exp\big((1-s)a_*/3\big).$$

每段长度除以 m 趋于 $1/\ell$，而 $K/m \to 0$。各项非负且只有有限项，所以可在 Step 3 的有限和中取下极限。再令 $\ell \to \infty$，得到

$$\liminf_m T_m \geq \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell-1} (i/\ell)^2 \exp\big((1 - i/\ell)a_*/3\big) = I_*.$$

矛盾 切向微扰给出 $T_m \leq 1/t$，限制截面的增长却给出 $\liminf_m T_m \geq I_* > 1/t$。

次数的选择至此才完成。在原先使 $f_m \to c$ 的子列上，只有有限多个次数可能有曲线中心的极小对。其余次数中，**所有极小对**的中心都等于 $\{x\}$。

第六节将把一个极小赋值换成取值数据相同的另一个赋值。这解释了为何命题必须排除每一个曲线中心极小对。也可以看到第四节统一尺度下界的作用。如果只知道 $a \geq 0$，积分只保证 $1/3$，而需要超过的 $1/t$ 严格大于 $1/3$。

第六节　在 x 上方构造除子 S

怎样从极小赋值构造在 x 非零的截面?

固定第五节给出的一个 $t<3$ 和一个满足命题 5.1 的次数 m，在所选基的零除子 $D_i=\operatorname{div}(s_i)$ 的共同消解上取一个极小赋值 v。现在要给这些 $D_i\sim mL$ 选取正系数，构造 $\Delta\sim_{\mathbb{R}} tL$，使 $v(\Delta)=A_X(v)$。

Step 1. 先把除子系数的条件写成取值向量上的线性不等式。在固定模型 Y 上，对每条边界分量 E_j 令

$$a_j=A(E_j),\qquad z_j=\big(\operatorname{ord}_{E_j}(D_i)/a_j\big)_{i=1}^{N}.$$

对闭包的像包含 x 的开交层 Z，设 $C_Z=\operatorname{conv}\{z_j : E_j\supset Z\}$，只取非空的顶点组。曲面上的 C_Z 是点或线段。若 $\sum_j a_ju_j=1$，那么单项式赋值的取值向量就是 $\sum_j(a_ju_j)z_j$。反过来，每个这样的凸组合都给出一个 discrepancy 为一的测试。这里 $N=N_m$。

记 $a=A(v)$，$q=(v(D_i)/a)_i$。q 属于某个 C_Z，而任何像为正维的交层对应的 C_Z 都不含 q。否则由该凸组合构造赋值，缩放回 a，就得到同一取值、同一尺度和同一目标值，中心却包含这条正维的像，违反命题 5.1。

现在用极小点的一阶导数确定系数。记各指数项的相对权重及相应的除子为

$$p_i=\frac{e^{-v(D_i)/m}}{\sum_h e^{-v(D_h)/m}},\qquad b_i=\frac{t}{m}p_i,\qquad \Delta=\sum_i b_iD_i.$$

因 $p_i>0$ 且 $\sum_i p_i=1$，Δ 有效且 $\Delta\sim_{\mathbb{R}} tL$。在 $\lambda=1$ 对 $\log F_{m,t}(\lambda v,\mathbf{s})$ 求导。极小性使导数为零，故 $a/t=\sum_i p_iv(D_i)/m$，即

$$b\cdot q=1,\qquad m\sum_i b_i=t<3.$$

再固定尺度 a，在任一含 q 的 C_Z 内沿线段从 q 走向 z。右导数为 $-(a/t)b\cdot(z-q)\ge 0$，故

$$b\cdot z\le 1\qquad (z\in C_Z,\ q\in C_Z).$$

对这些多面体的顶点 z_j，上式给出 $\operatorname{ord}_{E_j}(\Delta)\le A(E_j)$。在极小赋值上，$b\cdot q=1$ 给出 $v(\Delta)=A(v)$。第 15 页将用**含 q 的交层多面体**上的支持不等式来控制与约化除子 S 相交的分量。

Step 2. 后面的构造需要系数为有理数的边界 Δ_0，以及 x 上方满足 $\mathrm{ord}_{E_0}(\Delta_0) = A_X(E_0)$ 的素除子 E_0。因此要把 (q, b) 一起有理化，既保留严格预算，也保留 q 所属的每一个多面体。

对每个含 q 的 C_Z，取包含 q 的最小面。因 b 在 q 达到最大值 1，它在整个面上都等于 1。这些面的交是有理多面体，可在交中取充分靠近 q 的有理点 q^0，同时避开原来不含 q 的有限多个闭多面体。固定 q^0 后，只须对所涉顶点 z_j 保持 $b^0 \cdot z_j \le 1$，并令 $b^0 \cdot q^0 = 1$。这些有理线性约束的可行域包含 b，在含 b 的最小面上用有理点逼近 b，可保持严格正性和预算。引理 6.1 由此给出

$$\Delta_0 = \sum_i b_i^0 D_i \sim_{\mathbb{Q}} \tau L, \qquad \tau = m \sum_i b_i^0 < 3, \qquad b_i^0 > 0, \quad b^0 \cdot q^0 = 1.$$

q^0 与 q 属于完全相同的一族 C_Z。在每个含 q^0 的多面体上仍有 $b^0 \cdot z \le 1$。

为了 extract E_0，先在一个含 q^0 的多面体中将 q^0 写成顶点的有理凸组合。相应的有理单项式权重张成一条射线。在 SNC 锥的细分中，这条射线对应的素除子就是 E_0，其归一化取值向量为 q^0。由于 q^0 避开所有正维像对应的多面体，E_0 映到 x。

设 $I = \{i : q_i^0 > 0\}$。选 $M > 0$ 使 M/q_i^0 对 $i \in I$ 均为整数，定义

$$\mathfrak{c} = \sum_{i \in I} \mathcal{O}_X(-(M/q_i^0) D_i).$$

在已有模型上，各 $\pi^* D_i$ 局部是单项式乘单位，故 $\mathfrak{c}\mathcal{O}_Y$ 是一个单项式理想。选择合适的 toroidal modification，仍将所得模型记为 $\pi : Y \to X$，使 Y 光滑射影、E_0 已出现、$\mathfrak{c}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-G)$，且所有相关分量均为 SNC。

在曲面上，依次在 SNC 交点作 blow up 即可实现这两项要求。具体地，细分使有理射线出现，并把各单项式权重的最小值分成线性区，再取光滑细分。在 F_1 与 F_2 的一个交点作 blow up，记所得例外曲线为 F，则 $a_F = a_1 + a_2$，$\mathrm{ord}_F(D_i)$ 也等于两旧分量的相应阶数之和。故新向量

$$z_F = \frac{a_1 z_{F_1} + a_2 z_{F_2}}{a_1 + a_2}$$

落在旧线段中。由于这个 toroidal modification 只细分原有的锥，新模型上相交的分量仍可用同一个旧多面体来考察。

Step 3. 在修改后的 Y 上，对每个边界分量 F 记 $a_F = A(F)$，$z_F = (\mathrm{ord}_F(D_i)/a_F)_i$。把满足 $x \in \pi(F)$ 且 $z_F = q^0$ 的所有分量取约化和，记作 S。因 $E_0 \subset S$，S 非空。由上述细分及 q^0 对所有正维像的排除，S 的每个分量都映到 x。

若另一边界分量 F 与 S 的一个分量 E 相交，则该交点对应的线段为 $[z_E, z_F] = [q^0, z_F]$。这条线段包含在一个含 q^0 的旧多面体中，故 $b^0 \cdot z_F \le 1$。线性支持函数可能在整条边上取等号。我们希望等号只留在向量为 q^0 的分量上。

为此，用前一步的理想 $\mathfrak{c}$ 扰动边界。取稍后选定的有理数 $0 < \eta < 1$，令

$$B = (1-\eta)\pi^*\Delta_0 + \frac{\eta}{M}G, \qquad \mu_F = \min_{i \in I} \frac{z_{F,i}}{q^0_i}.$$

由理想之和的赋值公式，$\mathrm{ord}_F(G)/M = \min_{i\in I} \mathrm{ord}_F(D_i)/q^0_i = a_F\mu_F$，故

$$\frac{\mathrm{coeff}_F B}{a_F} = (1-\eta) b^0 \cdot z_F + \eta \mu_F.$$

若 $F \subset S$，两项中的 $b^0 \cdot z_F$ 与 μ_F 都等于 1。若 F 与 S 相交，利用正数 $b^0_i q^0_i$（$i \in I$）之和为 1，有

$$\mu_F \le \sum_{i \in I} b^0_i q^0_i \frac{z_{F,i}}{q^0_i} = \sum_{i \in I} b^0_i z_{F,i} \le b^0 \cdot z_F \le 1.$$

要使 $\mathrm{coeff}_F B = a_F$，必须 $\mu_F = b^0 \cdot z_F = 1$。上述加权平均等于最小值，迫使每个 $i \in I$ 的比值都为 1。又因 $b^0_i > 0$，所有 $i \notin I$ 的 $z_{F,i}$ 都必须为零。这样 $z_F = q^0$，而 F 与 S 交于 x 的上方，故它本身属于 S。

引理 6.2 的局部配置 对 $F \subset S$，有 $\pi(F) = \{x\}$ 和 $\mathrm{coeff}_F B = a_F$。其余与 S 相交的分量都满足 $\mathrm{coeff}_F B < a_F$。

等价地，在 S 附近边界 $B - K_{Y/X}$ 的系数在 S 上为 1，在相邻分量上严格小于 1。第六节最后一次取整正是沿这些分量进行。远离 S 的系数无需另作估计。

Step 4. 为用 Kawamata–Viehweg vanishing 从 S 上提升 section，先选 u 使 $\mathfrak{c}(uL)$ 整体生成。于是 $u\pi^*L-G$ 由整体截面生成，特别地是 nef。由 $\Delta_0\sim_{\mathbb{Q}}\tau L$ 得

$$3\pi^*L-B\equiv(3-(1-\eta)\tau-\eta u/M)\pi^*L+\frac{\eta}{M}(u\pi^*L-G).$$

当 $\eta=0$ 时第一系数为 $3-\tau>0$，故可选充分小的有理数 $\eta>0$ 保持该系数为正。因而 $3\pi^*L-B$ nef and big。这里用掉的是第四、五节选择 $t<3$ 所留下、并在有理化后仍保留的严格余量。

设 $D=K_Y+3\pi^*L-\lfloor B\rfloor$。由于 $D-(K_Y+\{B\})=3\pi^*L-B$，且小数部分 $\{B\}$ 的支撑为 SNC，定理 2.4 给出 $H^1(Y,\mathcal{O}_Y(D))=0$。将它用于约化 Cartier 除子 S 的短正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_Y(D)\longrightarrow\mathcal{O}_Y(D+S)\longrightarrow\mathcal{O}_S(D+S)\longrightarrow 0,$$

便得限制满射

$$H^0(Y,D+S)\longrightarrow H^0(S,(D+S)|_S)\longrightarrow 0.$$

为在 S 上构造可提升的 section，写 $D+S=\pi^*P+C$，其中 $C=K_{Y/X}-\lfloor B\rfloor+S$。因为 a_F 是整数，引理 6.2 给出

$$\begin{aligned}&\operatorname{coeff}_F C=(a_F-1)-a_F+1=0 \qquad (F\subset S),\\ &\operatorname{coeff}_F C=a_F-1-\lfloor\operatorname{coeff}_F B\rfloor\geq 0 \quad (F\not\subset S,\ F\cap S\neq\emptyset).\end{aligned}$$

支撑外的分量系数为零。因此 C 在 S 的一个邻域上有效，且不含 S 的任何分量。S 约化且各分量均映到 x，所以 $\pi|_S$ 在概形意义下经 x 分解，$\pi^*P|_S=P_x\otimes\mathcal{O}_S$。取 $0\neq e\in P_x$，乘上 C 的自然截面在 S 上的限制，便得到 $\sigma_S\in H^0(S,\mathcal{O}_S(D+S))$，这个 section 在 S 每个分量的一般点都非零。即使 S 可约，这个构造在交点处也自动粘合，因为各分量上的截面来自同一个纤维向量和邻域上的同一个自然截面。

由上述限制满射，将 σ_S 提升为 $\tilde\sigma\in H^0(Y,\mathcal{O}_Y(D+S))$。任一非例外曲线 $F\not\subset S$ 的 $\operatorname{coeff}_F C=-\lfloor\operatorname{coeff}_F B\rfloor\leq 0$，故 C 的正部是例外的。由引理 2.5，$\tilde\sigma$ 可以 descend 到 X，给出 $s\in H^0(X,P)$。若 $s(x)=0$，则它的拉回沿 S 中每一分量都有正阶，这与 $\operatorname{coeff}_F C=0$ 及一般点非零矛盾。

曲面结论 得到 $s(x)\neq 0$，与 x 是 $|P|$ 的 base point 的假设矛盾。因 x 任意，K_X+3L 由整体截面生成。

任意维数　两处维数相关的估计

从曲面计算读回一般维数（初见可忽略）

令 $\dim X=n$，$P=K_X+(n+1)L$。第四节仍可用完全旗标固定一组基，归一化权重所在的线段换成单纯形 $\sum_j A(E_j)u_j=1$。下面说明第三节的平均消失阶与第五节的切向估计怎样随维数改变。

Step 1. 先看第三节的计数。在 n 维单纯形中，总次数不超过 r 的非负整点有 $\binom{r+n}{n}$ 个，依次填满所得的平均总次数为 $nr/(n+1)$。因此

$$\liminf_{j}\frac{1}{jN_j}\sum_{\gamma\in H_j}|\gamma|_1\geq\frac{n}{n+1}(L^n)^{1/n}.$$

若下极限恰为 $n/(n+1)$，则 $L^n=1$。如第 4 页，沿 $\mu_j\to n/(n+1)$ 的子列，$j^{-1}H_j$ 会遇到标准单纯形内部的每个固定小球。取有理数 $n<t'<n+1$，在经过 $(1/t',\dots,1/t')$ 的切片中选点并清分母，得到 $ht'L$ 的截面 r_ν，它们在 x 处的重数都是 nh。

先设 $n>1$。在 x 处作 blow up，记 $\pi:B\to X$，$E\simeq\mathbb{P}^{n-1}$。从 π^*r_ν 中扣去 nhE 再限制到 E，得到 r_ν 的最低次齐次式 g_ν。在局部标架下，这些齐次式生成 E 上的理想 $\mathfrak{b}_E$。我们要证明每个 $z\in E$ 都满足 $\mathrm{lct}_z(E,\mathfrak{b}_E)>1/h$。有了这个严格不等式，下一页的取整就会给出一个有效除子。

用 $[Z_1:\cdots:Z_n]$ 表示 E 的齐次坐标。设 Z^{β_ν} 是 g_ν 的首单项式。上述切片中选点的条件保证 β_ν/h 的凸包在超平面 $\sum_i u_i=n$ 中把 $\mathbf{1}=(1,\dots,1)$ 包含在相对内部。在仿射图 $Z_k\neq0$ 取 $z_i=Z_i/Z_k$（$i\neq k$）。删去 β_ν 的第 k 个坐标得到 γ_ν，首单项式在这张图上就写成 z^{γ_ν}。由于被删去的坐标由总和唯一决定，投影后的凸包 $\mathrm{conv}\{\gamma_\nu/h\}$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中把 $\mathbf{1}$ 包含在内部。

给定 $0\neq w\in\mathbb{R}^{n-1}_{\geq0}$，由于 $\mathbf{1}$ 是内点，可取充分小的 $\delta>0$ 使 $\mathbf{1}-\delta w$ 仍在凸包中。线性函数 $\langle w,-\rangle$ 在凸包上的最小值不会超过它在这个点的值，故

$$\frac{1}{h}\min_{\nu}\langle w,\gamma_\nu\rangle\leq\langle w,\mathbf{1}-\delta w\rangle<\sum_{i\neq k}w_i.$$

记 $\mathfrak{a}_0$ 为这些首单项式生成的理想。对仿射图上方的素除子 F，取 $w_i=\mathrm{ord}_F(z_i)$，左端就是 $\mathrm{ord}_F(\mathfrak{a}_0)/h$。坐标超平面组成约化 SNC 除子，故 $\sum w_i\leq A_E(F)$。若 $w=0$，则理想阶为零，而 $A_E(F)>0$。这样对所有 F 都有 $\mathrm{ord}_F(\mathfrak{a}_0)/h<A_E(F)$。在 log resolution 的有限个分量上取最小值，便得到每个 $z\in E$ 都满足 $\mathrm{lct}_z(E,\mathfrak{a}_0)>1/h$。

现在从首单项式回到 g_ν。这些齐次式只有有限项，可选整数权重 c 使每个首单项式都是唯一的最低权项。令

$$g_{\nu,\lambda}(Z)=\lambda^{-\langle c,\beta_\nu\rangle}g_\nu(\lambda^{c_1}Z_1,\dots,\lambda^{c_n}Z_n).$$

展开后 λ 的幂次都非负。$\lambda=0$ 时只留下首单项式，$\lambda=1$ 时恢复 g_ν。记各纤维的理想为 $\mathfrak{a}_\lambda$。由引理 2.3，满足 $\mathrm{lct}_z(E,\mathfrak{a}_\lambda)\leq1/h$ 的 (z,λ) 构成闭集。因 E 射影，它在参数直线上的像也是闭集，且不含 0。可取非零的 λ 避开这个像。所有非零纤维只相差对角坐标变换和生成元的非零常数倍，所以 $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{b}_E$ 在 E 的每一点也有严格大于 $1/h$ 的阈值。

这个严格不等式怎样给出截面？设 $\mathfrak{b}$ 是扣去 nhE 后的基理想。取 E 和 $\mathfrak{b}$ 的一个 log resolution $\sigma : T \to B$，记 E' 为 E 的严格变换，写 $\mathfrak{b}\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_T(-G)$。限制到 E' 就有 $\mathfrak{b}_E\mathcal{O}_{E'} = \mathcal{O}_{E'}(-G|_{E'})$。对 E' 上的每个素除子 F，严格阈值给出

$$\frac{\operatorname{ord}_F(G|_{E'})}{h} < A_E(F) = 1 + \operatorname{ord}_F(K_{E'/E}).$$

右端是整数，故左端向下取整至多为 $\operatorname{ord}_F(K_{E'/E})$。逐个分量取整便得有效除子 $C = K_{E'/E} - \lfloor G|_{E'}/h \rfloor$。由伴随公式，限制到 E' 的线丛是 $P_x \otimes \mathcal{O}_{E'}(C)$。取 $0 \neq e \in P_x$，乘以 C 的自然截面，所得 section 在 E' 的一般点非零。因 $n+1-t' > 0$，如第 5 页，vanishing 给出限制满射，可以把它提升到 T。相对于 $(\pi\sigma)^*P$ 的修正除子沿 E' 系数为零，正部是例外的。由引理 2.5，提升的 section 可以 descend 到 X，并保持 $s(x) \neq 0$。

当 $n = 1$ 时取 $B = X$、$E = x$，扣去 hx 后的截面在 x 非零，故限制理想为单位理想。上述提升同样适用。因此在任意维数，若 x 是 $|P|$ 的 base point，必有 $\liminf_m \mu_m > n/(n+1)$。结合 $A(\operatorname{ord}_x) = n$，这使第四节的导数 $n/t - \mu_m$ 在 m 大且 t 充分接近 $n+1$ 时为负。

Step 2. 再看第五节。设取到极小值的单项式赋值 v 在 X 上的中心为 W，$\dim W = d > 0$。在光滑模型 Y 上，v 给 r 个相交的除子的局部方程赋予正权重 $u_1, \dots, u_r$。对应交层的闭包 Z 的维数是 $n-r$，且 Z 映到 W 上。取满足引理 4.5 的非常一般点 $y \in W$，在 y 上方选一个 $Z \to W$ 光滑的点 z，避开其余边界和相对典范除子的其余分量。纤维 Z_y 在 z 处的维数为 $f = n - r - d$。

在 z 处选取三组局部参数。沿 Z_y 的参数记录**固定 y 后**在纤维内的位置，从 W 拉回的参数记录底点沿 W 怎样移动。

局部参数	原赋值 v	扰动 v_ε
$\xi_1, \dots, \xi_r$，定义交层的除子方程	$u_i > 0$	u_i
$\eta_1, \dots, \eta_f$，沿纤维 Z_y 的参数	0	ε^2
$s_1, \dots, s_d$，从 W 拉回的参数	0	ε

η_j 和 s_i 虽然在 z 为零，却都不在 Z 上恒为零，在 Z 的一般点是单位。原赋值以 Z 为中心，所以它们的权重都是零。曲面上若 W 是曲线，则 $n = 2$、$d = r = 1$，所以 $f = 0$，第 9 页只出现一个切向参数。

扰动后所有参数权重都为正，故中心变为 z，在 X 上映到 y。单项式 $\xi^\alpha\eta^\gamma s^\beta$ 的权重由 $\sum_i u_i\alpha_i$ 变为

$$\sum_i u_i\alpha_i + \varepsilon|\beta|_1 + \varepsilon^2|\gamma|_1, \qquad A(v_\varepsilon) = A(v) + d\varepsilon + f\varepsilon^2.$$

新加权的坐标除子在 z 附近都有 log discrepancy 1，这给出右式。可见纤维参数只贡献二阶项。对每个基截面，在达到原权重的项中取最小的 $|\beta|_1$。这些数的加权平均除以 m 就是 T_m。如第 9 页，由极小性，$\log F$ 在 0 处的右导数 $d/t - T_m \geq 0$。

引理 5.2 给出 $(d!I_W(h))^{1/d} \geq h - C_d$，常数独立于 W。记 $b_p(j) = (d!\#G_p(j))^{1/d}$。把格点集增厚为单位立方体，用 Brunn–Minkowski 及有界次数的 $\{0,1\}^d$ 纯切向首项，得 $b_p(j+h) \geq b_p(j) + h - C'_d$ 对每个非空旧组成立。同体积的正象限单纯形使切向总次数的一次矩最小，因而曲面的平方和换成对 b_p^{d+1} 的加权和。

最后比较 T_m 的上下界。按第 11–12 页的方法累加并比较不同次数，用 $N_{\lfloor sm\rfloor}/N_m \to s^n$，得到

$$\liminf_m T_m \geq d\int_0^1 s^n \exp\left((1-s)a_*/(n+1)\right) ds > d/t.$$

末个严格号来自先取统一的 $a_* > 0$，再固定充分接近 $n+1$ 的 $t < n+1$。这就排除了所有正维极小中心。

Step 3. 最后把提升截面的论证推广到任意维数。第六节的归一化取值向量仍落在有限个有理多面体中，尺度导数和支撑不等式仍给出 $b^0 \cdot q^0 = 1$ 和 $m\sum_i b_i^0 < n+1$。在曲面上，所用的 toroidal modification 自动满足下面的 discrepancy 等号。在一般消解上，需要记录哪些分量满足这个等号。

设初始 SNC 模型为 Y，边界分量为 E_j。在保留 q^0 所对应素除子并主理想化 $\mathfrak{c}$ 的更高模型 $\rho : T \to X$ 上，对分量 F 记

$$a_F = A(F), \qquad r_F = \sum_j \mathrm{ord}_F(E_j)A(E_j) \leq a_F.$$

当 $r_F > 0$ 时，ord_F 在 Y 上的 SNC retraction 的 log discrepancy 等于 r_F。记 $z' = (\mathrm{ord}_F(D_i)/r_F)_i$。取所有满足 $x \in \rho(F)$、$r_F = a_F$ 和 $z' = q^0$ 的边界分量组成约化除子 S。所保留的有理射线保证 S 非空，q^0 的选择保证其每个分量映到 x。

若 F 与 S 相交且 $r_F > 0$，对应的归一化取值向量 z' 与 q^0 属于同一个旧多面体，故 $b^0 \cdot z' \leq 1$。扰动后的精确公式为

$$\frac{\mathrm{coeff}_F B}{a_F} = \frac{r_F}{a_F}\Big((1-\eta)b^0 \cdot z' + \eta \min_{i\in I} \frac{z_i'}{q_i^0}\Big).$$

若 $r_F = 0$，则各 $\mathrm{ord}_F(D_i)$ 和 $\mathrm{coeff}_F B$ 均为零。上式右边达到 1，必须同时 $r_F = a_F$ 且 $z' = q^0$，从而 $F \subset S$。于是 S 及其相邻分量恰好满足曲面计算中用于取整的等号和严格不等式。

以 $(n+1)\rho^*L$ 代替 $3\pi^*L$，照第 16 页取整并应用 Kawamata–Viehweg vanishing，再将提升的截面 descend 到 X，便得到 $K_X + (n+1)L$ 的一个在 x 非零的截面。当 $n = 1$ 时，S 的分量可以是 x 本身，它在修正除子中的系数仍为零。至此得到任意维数的主定理。

要由主定理得到推论 6.3，还需处理 $k > n+1$ 的情形。即使 L 是 ample line bundle，$H^0(X, L)$ 也可能为零。令 $r = k-n-1$，在光滑射影簇 $Z = X \times \mathbb{P}^r$ 上取 ample line bundle $M = L \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$。因 $\dim Z = n+r$，对 (Z, M) 应用已经得到的主定理，有

$$K_Z + (n+r+1)M = (K_X + kL) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n).$$

右边整体生成。限制到任一 $X \times \{z\}$，便得到 $K_X + kL$ 整体生成。这一步使用各维数的主定理。$r = 0$ 时就是临界次数本身。

原稿来源 OpenAI，*Fujita's freeness conjecture*，2026 年 9 月 23 日稿。本文的定理、引理与公式出处编号均指此稿。曲面部分在第三节直接计算 $\mathbb{P}^1$ 上的重数，在第五节使用一维和集，在第六节用 toroidal modification 选择模型。

编订说明 这份笔记整理自我与 ChatGPT 研读原稿时的讨论。我选择先从曲面讲起，再单独说明依赖维数的步骤。讲稿由 ChatGPT 根据讨论起草，经我逐节审订。定稿前，我又通读了全文，确认有代数几何基础的读者只读这份笔记也能跟上证明的思路。

如果你发现笔记中有疏漏，或觉得哪一步不好理解，欢迎来信与我讨论（zhumz@kias.re.kr）。